Ответы и решения задач «красного» уровня сложности MathCat.ONLINE

Задача 1. (5 баллов) Аня и Таня вместе весят 40 кг, Таня и Маня – 50 кг, Маня и Ваня – 90 кг, Ваня и Саня – 100 кг, Саня и Аня – 60 кг. Сколько весит самый тяжёлый среди них?

Ответ: 60 кг.

Решение: Аня легче Мани (на 10 кг), Таня легче Вани на 10 кг, Маня легче Сани на 10 кг, поэтому самыми тяжелыми могут быть только Ваня или Саня. Из условий получаем Ваня-Аня = 100-60=40, Ваня-Таня=90-50=40, значит 2*Ваня - (Таня+Аня) = 2*Ваня-40 = 80, откуда Ваня=60. Так как 60 больше, чем 100-60, то именно Ваня самый тяжелый.

Задача 2. (5 баллов) Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое в 289 раз больше суммы своих цифр.

Ответ: 2023.

Решение: Проверим несколько первых четырёхзначных чисел, кратных 289:

$4 \cdot 289 = 1156$ – сумма цифр не равна 4;

$5 \cdot 289 = 1445$ – сумма цифр не равна 5;

$6 \cdot 289 = 1734$ – сумма цифр не равна 6;

$7 \cdot 289 = 2023$ – сумма цифр равна 7, поэтому это наименьшее число, удовлетворяющее условию.

Задача 3. (7 баллов) На острове Логики живут рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, всегда говорящие неправду. Все жители острова знают, кто есть кто. Однажды двое жителей острова сказали:

Житель А: «Житель Б мог бы сказать, что житель В считает жителя Г лжецом».

Житель Б: «Житель А мог бы утверждать, что житель В – рыцарь».

Про кого из четверых можно точно понять, что он лжец?

Ответ: про Г.

Решение: Утверждение жителя Б эквивалентно тому, что среди трех жителей А, Б и В четное число лжецов (может быть, 0, а может быть любая пара из них). Аналогично, утверждение жителя А эквивалентно тому, что среди А, Б, В и Г нечетное число лжецов (один, причем любой из них, или трое, причем любые). Из двух этих утверждений можно сделать только вывод о том, что Г лжец. Все остальные могут как быть лжецами, так и не быть ими.

Задача 4. (9 баллов) Две высоты треугольника равны 2 см и 7 см, а третья тоже равна целому числу сантиметров. Какому?

Ответ: 2.

Решение: Обозначим стороны против двух известных высот a и b, а третью сторону - c. Площадь треугольника равна $(2a)/2 = (7b)/2$, поэтому $a=3.5b$. В силу неравенства треугольника третья сторона не больше $a+b=4.5b$ и не меньше $a-b=2.5b$, поэтому соответствующая высота не больше $7/2.5 = 2.8$ и не меньше $7/4.5 = 1.55$; между этими двумя величинами есть только одно целое число - 2.

Задача 5. (9 баллов) На столе стоят красная, синяя и зелёная коробки. У Пети есть 11 шариков, пронумерованных числами от 1 до 11. Сколькими способами он может разложить шарики в коробки так, чтобы в каждой коробке был хотя бы один шарик и никакая коробка не содержала пары шариков, пронумерованных последовательными числами?

Ответ: 3066.

Решение: Шарик с номером 1 Петя может положить в любую из трёх коробок. Для каждого следующего шарика есть два варианта, в какую коробку он может быть положен. Итого получаем $3\cdot 2^{10} = 3072$ способа. Но из них нужно исключить те варианты, когда все шарики оказались в двух коробках. Таких вариантов $3\cdot 2 = 6$, поэтому искомых способов $3072 - 6 = 3066$.

Задача 6. (10 баллов) Число 545 обладает весьма забавным свойством: какую бы одну цифру в нём ни изменить (на любую цифру от 0 до 9), результат не будет делиться на 11. Приведите пример 12-значного числа с таким же свойством.

Ответ: любое из чисел 181818181818, 272727272727, 363636363636, 454545454545, 545454545454, 636363636363, 727272727272, 818181818181, 909090909090.

Задача 7. (12 баллов) Найдите сумму корней уравнения $2^x = 2\sqrt{x}$.
Ответ: 1.5
Решение: Один корень (x=1) легко угадывается. Но так как график показательной функции выпуклый вниз, график корня выпукл вверх, и в точке x=1 они не касаются, то должен быть еще как минимум один корень. Его тоже несложно найти подбором, он равен 0.5. То, что корней всего два (а не четыре, например), нетрудно убедиться с помощью производной: производная разности левой и правой части монотонно возрастает, следовательно, имеет не более одного корня, - поэтому сама функция не может иметь более двух корней. Сумма найденных корней 1+0.5 = 1.5.

Задача 8. (14 баллов) Когда солнечные лучи попадают на оконное стекло, 80% из них проходят через него, а 20% отражаются. Какая часть солнечных лучей проходит через два поставленных рядом стекла? Ответ запишите в виде дроби.

Ответ: $\frac{2}{3}$.
Решение: 80%*80% = 0.64 лучей, прошедших через двойное стекло сразу, назовем “первой группой лучей”. Ясно, что есть и другие группы: вторая группа - это те лучи, которые после отражения снова отразятся от первого стекла и пройдут (со второго раза) через второе, - размер этой группы равен 0.2*0.2*0.64. Аналогично, размер третьей группы равен $0.2^4 * 0.64$, четвертой $0.2^6 * 0.64$ и т.д. Всего пройдет $0.64*(1+0.2^2+0.2^4+...)=0.64/(1-0.2^2)=0.64/0.96 = 2/3$ всех лучей.

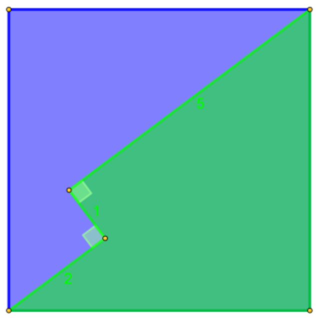
Рисунок 1

Задача 9. (14 баллов) Концы диагонали квадрата соединены трёхзвенной ломаной с перпендикулярными звеньями, имеющими длины 2, 1 и 5 см. Найдите площадь нижней (зелёной) части квадрата. (См. рис.1)

Ответ: 14 см^2.
Решение: Сперва найдем длину диагонали квадрата. Она равна гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 7 и 1, то есть $\sqrt{50}$. Следовательно, сторона квадрата равна 5, а площадь - 25.
Теперь на звене длиной 5 см отметим точку в 2 см от правой верхней вершины квадрата. Она, очевидно, симметрична нижней точке изгиба ломаной относительно центра квадрата. Мысленно покрасим белым цветом зеленый прямоугольный треугольник с катетами 1 и 3 (=5-2). Так как симметричные фигуры имеют равные площади, то Зеленый - Белый = Синий + Белый, откуда Зеленый-Синий = 3. Так как сумма Зеленый + Синий равна 25, то Зеленый = 14, а Синий = 11.

Задача 10. (15 баллов) Найдите сумму дробей $\frac{k}{k^4+k^2+1}$ по всем k от 0 до 100.

Ответ: $\frac{5050}{10101}$.
Решение: $\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{k}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)} = \frac{1}{2(k^2-k+1)} - \frac{1}{2(k^2+k+1)} = \frac{1}{2(k^2-k+1)} - \frac{1}{2((k+1)^2-(k+1)+1)}$
При сложении таких разностей все промежуточные слагаемые сократятся, и останется ½ - ½ * 1/10101 = 5050/10101.